



TITLE:

二成分混合流体におけるBenard対流(流体方程式の解の空間的構造)

AUTHOR(S):

八幡, 英雄

CITATION:

八幡, 英雄. 二成分混合流体におけるBenard対流(流体方程式の解の空間的構造). 数理解析研究所講究録 1991, 774: 41-54

ISSUE DATE:

1991-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/82417>

RIGHT:

二成分混合流体における Bénard 対流

広島大理 八幡英雄 (Hideo Yahata)

§1 はじめに

平行平板間に閉じこめられた二成分混合流体に、垂直方向に温度勾配を加えた場合に発生する対流を考える。垂直上向きに z 軸をとり、水平面内に x, y 軸をとる。流体の速度を $u = (u_x, u_y, u_z)$ 、温度を T 、成分 1 の濃度を x_1 、圧力を p とすると、運動方程式は Boussinesq 近似で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u \cdot \nabla) u = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \frac{\rho}{\rho} g e_z + \nu \Delta u \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (u \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T + \gamma_1 \Delta x_1 \quad (2)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial t} + (u \cdot \nabla) x_1 = \gamma_2 \Delta T + D \Delta x_1 \quad (3)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (4)$$

の形となる。¹⁾ ここで ν は動粘性率、 κ は温度伝導率、 D は拡散係数、 $e_z = (0, 0, 1)$ は z 軸方向の単位ベクトルである。一

方, γ_1 を含む項は Dufour 効果, γ_2 を含む項は Soret 効果によるものであるが, 液体においては前者は通常小さな量となるため以下では省略する。この他に状態方程式として, 密度 ρ と T, x_1 との間に関係式

$$\rho(T, x_1) = \bar{\rho} [1 - \alpha(T - \bar{T}) + \beta(x_1 - \bar{x}_1)] \quad (5)$$

が成立しているとする。 α, β はそれぞれ温度膨脹率, 溶質膨脹率で, 横線は平均量を示す。

境界条件としては, 上下の水平平板 ($z = d/2, -d/2$, ただし d は流体層の厚さ) においてそれぞれ温度 T_u, T_l (ただし $\Delta T = T_l - T_u > 0$) を与え, 各境界壁は流体が非透過の固定壁とする。対流が存在しない伝導・拡散状態 ($u = 0$) において, 各場の量を添字 S で表すと, それらは

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p^S - \frac{1}{\rho} \rho^S g e_z \quad (6)$$

$$0 = k \Delta T^S \quad (7)$$

$$0 = \gamma_2 \Delta T^S + D \Delta x_1^S \quad (8)$$

をみたす。ここで, 境界条件は新しい場の量 $\eta = x_1 + \frac{\gamma_2}{D} T$ を導入すると,

$$T = \begin{cases} T_u, & z = d/2, \\ T_l, & z = -d/2, \end{cases} \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad z = \pm d/2 \quad (9)$$

と表される。したがって (6) ~ (8) の解は,

$$T^S = \bar{T} - \frac{\Delta T}{d} z, \quad \eta^S = \bar{\eta} = x_1^S + \frac{\gamma_2}{D} T^S \quad (10)$$

となる。ただし, $\bar{T} = (T_l + T_u)/2$, $\bar{\eta} = \text{const.}$ である。そこで $\omega = 0 + \omega$, $T = T^S + \delta T$, $\eta = \eta^S + \delta \eta$, $\delta p = \bar{p} [-\alpha(1+S)\delta T + \beta\delta \eta]$ (\equiv して $S = \beta\gamma_2/\alpha D$ は分離比とよばれる) とおいて, (1) ~ (4) に代入し対流を記述する方程式を求める,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\omega \cdot \nabla) \omega = -\frac{1}{\bar{p}} \nabla \delta p + [\alpha(1+S)\delta T - \beta\delta \eta] g \mathbf{e}_z + \nu \Delta \omega, \quad (11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta T + (\omega \cdot \nabla) \delta T - \frac{\Delta T}{d} \omega_z = \kappa \Delta \delta T \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta \eta + (\omega \cdot \nabla) \delta \eta = \frac{\gamma_2 \kappa}{D} \Delta \delta T + D \Delta \delta \eta \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \omega = 0 \quad (14)$$

となる。さらに, $t \rightarrow d^2 t / \nu$, $\omega \rightarrow (\nu/d) \omega$, $\delta T \rightarrow (\kappa \nu / g \alpha d^3) \theta$, $\delta \eta \rightarrow (\gamma_2 / D) (\kappa \nu / g \alpha d^3) \eta$ とし, (11) ~ (14) を無次元化すると,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\omega \cdot \nabla) \omega = -\nabla \frac{\delta p}{\bar{p}} + \frac{1}{\sigma} [(1+S)\theta - S\eta] \mathbf{e}_z + \Delta \omega \quad (15)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \theta = (Ra) u_z + \frac{1}{\sigma} \Delta \theta \quad (16)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \eta = \frac{L}{\sigma} \Delta \eta + \frac{1}{\sigma} \Delta \theta \quad (17)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (18)$$

の形になる。この方程式系は4個の無次元パラメータによって特徴づけられている。それらは Rayleigh 数 $Ra = g\alpha d^3 \Delta T / \kappa \nu$, Prandtl 数 $\sigma = \nu / \kappa$, Lewis 数 $L = D / \kappa$, 分離比 $S = \beta \gamma_2 / \alpha D$ である。

方程式系 (15) ~ (18) は分離比 S が, $S < -1$, $-1 < S < 0$, $0 < S$ の三つの場合で異なったふるまいを示す。ここでは特に興味深いと思われる, 近年多くの実験グループによって観測結果が集積されている $-1 < S < 0$ の場合を扱うことにする。

この場合

- ① $\Delta T = T_h - T_c > 0$ のとき全体の密度 ρ は下層で小さく上層で大きくなる。
- ② 2つの成分流体のうちより密度の大きいものの濃度が下層で大きくなる。
- ③ 通常温度の緩和時間 $\tau_T \sim d^2 / \kappa$ は, 濃度の緩和時間 $\tau_x \sim d^2 / D$ に比べてはるかに小さい。 $(L = D / \kappa \sim 10^{-2})$ である。

の諸条件が成立つため、伝導・拡散状態から対流が発生する場合に振動的不安定性によって起る。これは線型理論の範囲の話で70年代にはすでに知られていた。近年の実験によりこのようにして発生した対流ロール胞が、ロール軸の垂直方向に移動することが見出され、travelling wave (TW) state とよばれている。さらに Ra のある値の範囲で、伝導・拡散状態(無対流状態)と対流ロール状態とが一つの容器内に共存する状態が見出され、localized travelling wave (LTW) state とよばれる。^{2)~10)}

これらの現象について理論的研究で明らかになった点をいくつか列記すると、

① 伝導・拡散状態(無対流状態)から対流状態への遷移は亜臨界 Hopf 分岐で起る。¹¹⁾

② 対流の定常状態は、 X をその代表的な振幅とすると $C_0 X + C_1 X^3 + C_2 X^5 = 0$ の形の方程式によって定まり、 $C_1 \neq 0$ であるため発生点付近では一般に2個の正の解をもつ。そのうち小さな方の解は不安定である。一方大きな方の解は Ra が十分大きいとき定常ロール解に近づくが、 Ra をそこから下げていくとある $Ra = (Ra)_H$ で Hopf 分岐が起って TW が発生する。このことは空間的に2次元的で、ロール軸に垂直方向に周期的境界条件を課した系に対して二つのグループに

よって示されている。この際 Bensimon らは $\sigma = \omega$, $L = 0.01$ の系に対して Galerkin 法を用い¹²⁾ Lücke らは $\sigma = \omega$, $L = 0.01$ $S = -0.25$ の系に対して MAC-simulation を行った。¹³⁾

③ LTW の発生については次のような理論的説明が試みられている。

(a) Cross¹⁴⁾ は流体容器の両端の側壁での TW の反射を考へ、左向きと右向きに進行する波の成分が結合した連立の振幅方程式を導びき、これらの数値解においてパラメータの変化によって容器全体に広がった状態 (extended TW) と局在した状態 (LTW) が現われることを見出した。理論的な根拠としては、進行波の波頭の安定・不安定を定める Dee-Langer の理論が援用されている。

(b) Thual & Fauve¹⁵⁾ は振幅方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \mu W + \alpha \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \beta |W|^2 W + \gamma |W|^4 W \quad (19)$$

を考へた。ここで $\mu, \alpha, \beta, \gamma$ は係数で、特に $\text{Re}(\beta) > 0$, $\text{Re}(\gamma) < 0$ で亜臨界型の係数もっていることが特徴である。彼らはいくつかのパラメータに対してこの方程式の simulation を行い、空間的に局在した解が安定的に現われることを見出した。これは壁からの反射成分なしに局在解が発生する可能性を示し、annulus 状の容器内の局在状態 LTW 発生の理解

に有効であると考えられる。

§2 直方体容器内の対流の simulation

ここでは方程式系 (15) ~ (18) を用いて、直方体容器内の対流の時間的发展とそれにともなう空間パターンの変化の simulation を行った結果をのべる。計算は 2次元のとして (xz 平面), 対流ロールの軸方向 (y 軸) の自由度は無視する。容器のアスペクト比を Γ_x とすると、流体の占める領域は $0 < x < \Gamma_x$, $-1/2 < z < 1/2$ である。系のパラメータは 25 wt% ethanol in water の 25°C 付近での実験に対応して $\sigma = 18$, $L = 0.015$, $S = -0.11$ とし、さらにアスペクト比は $\Gamma_x = 12$ にした。境界条件は $U = (U_x, 0, U_z)$ についてはすべてなし, θ については水平壁で等温的・側壁で断熱的, η については各壁で非透過的とする。すなわち

$$U_x = U_z = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \theta = \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0, \quad z = \pm \frac{1}{2}$$

$$U_x = \frac{\partial U_x}{\partial x} = U_z = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0, \quad x = 0, \Gamma_x$$

である。計算には MAC 法を用いて、空間を 192×16 の格子に分割し、得られた差分方程式を直接法によって時間積分した。

Steinberg らは実験結果を整理して、対流の主な状態から

TWが支配的な対流パターンになるまでの成長過程は、次の3段階に分割されるとのべている。⁴⁾

- ① 対流ロール状のパターンが雑音的に現われる。
- ② 系のある特定の点(topological defect)からロール状パターンが発生し、左右方向にこの点から遠ざかる方向に伝播していく(counterpropagating wave)。
- ③ 右へ進む波と左へ進む波のどちらか一方が卓越して他方をおしだすことにより、系全体を占め、一方へ進行するTW状態となる。

したがって①を線型領域、②を弱非線型領域、③を飽和領域とよぶことができると思われる。

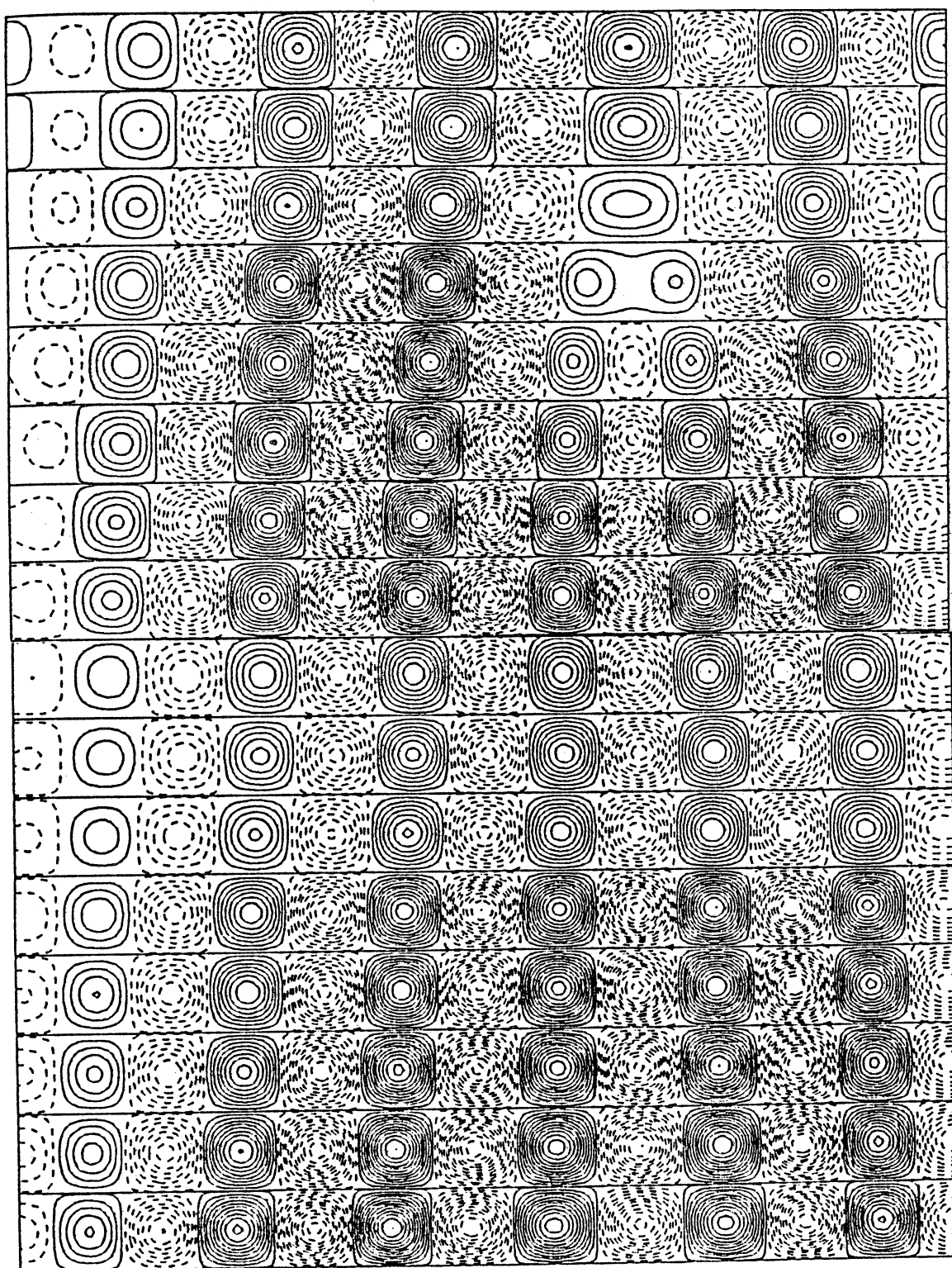
以下簡単に筆者が現在までに得ている計算結果の一端を示す。図1は $r=1.20$ ($r = Ra / (Ra)_c$, $(Ra)_c = 1708$) における温度パターンの時間発展を示す。各長方形が飽和領域 $(0, \Gamma_x) \times (-1/2, 1/2)$ を表わし、その中に温度の空間パターンが温度 θ の等値線によって示されている。但し実線は正の値、点線は負の値に対応している。時間は上から下に向っている。上記②で言及されているような defect から左右に進行していくパターンがみられる。図2は飽和領域における u_x, u_z, T, α_1 の等値線を示す($r=1.18$)。長方形の左の方の部分は殆んど無対流状態で、全体としてTW状態を

示している。この場合に T, x_1 の空間パターンも鳥瞰図として表わしたものを図3, 図4に示す。このように TW の発達の様子も大略 simulation によって追うことができるが、濃度境界層の安定性と mesh 間隔の関係などは今後の研究をなお必要としている。

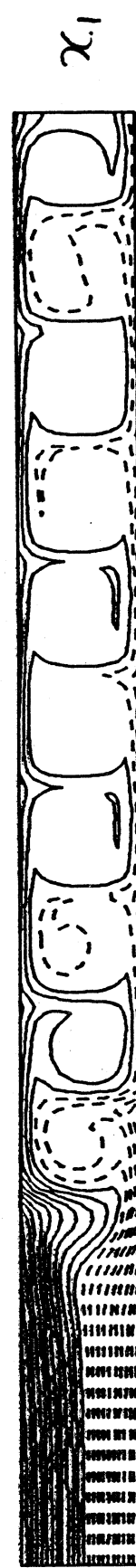
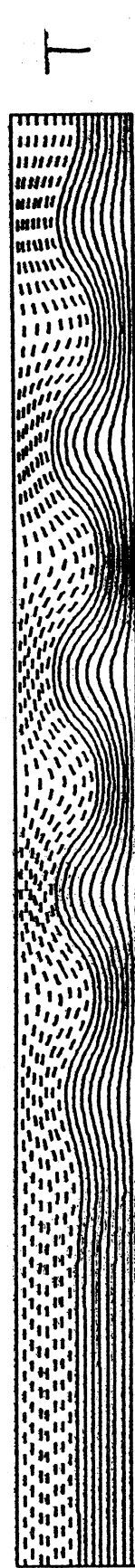
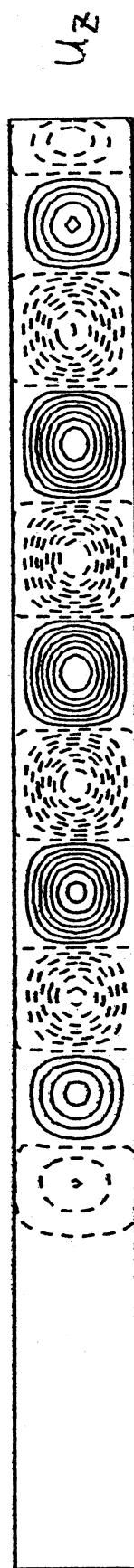
文 献

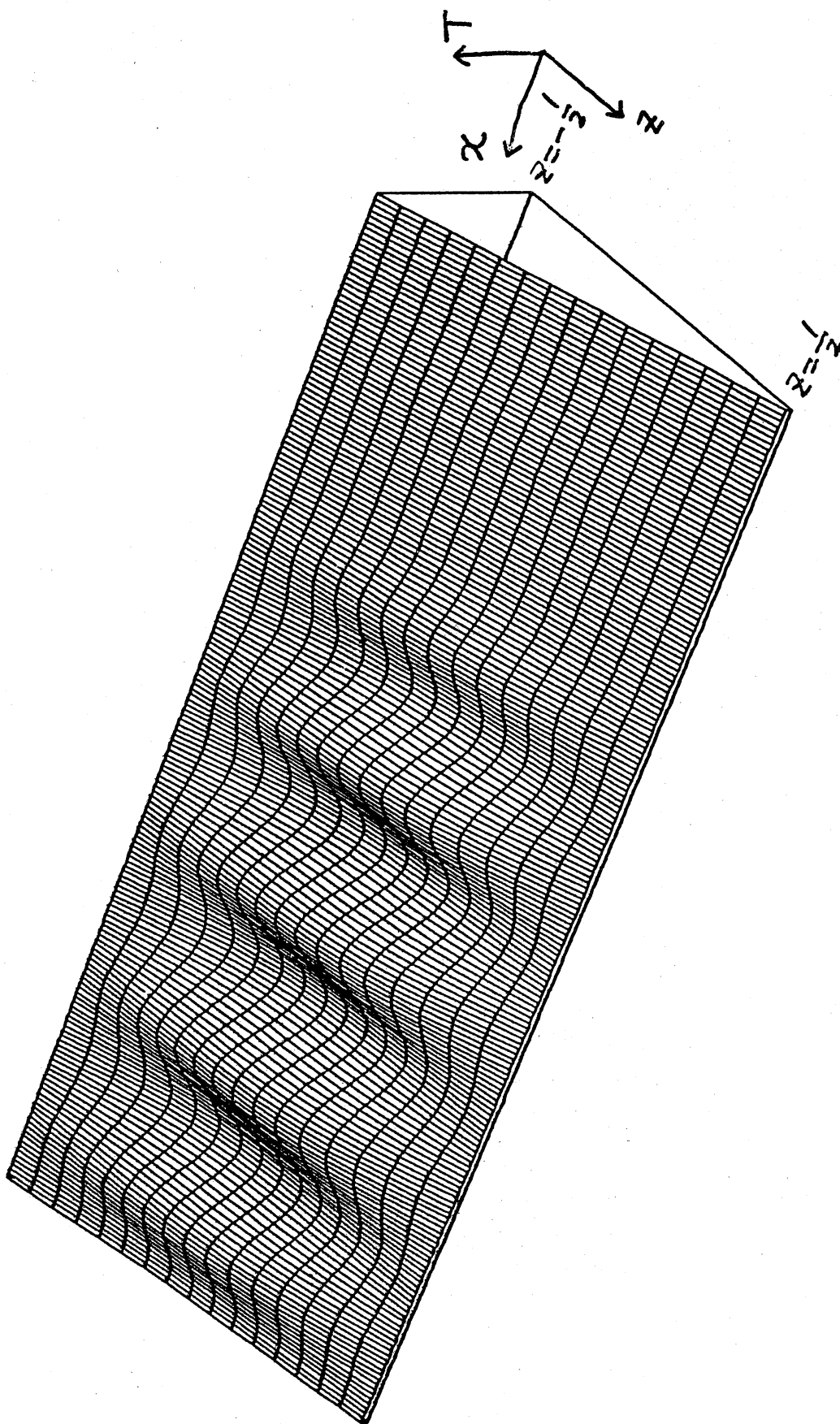
- 1) D.T.J. Hurle & E. Jakeman, JFM 47(1971) 667.
D. Gutkowicz-Krusin et al., Phys. Fluids 22(1979) 1443.
- 2) R.W. Walden, P. Kolodner, A. Passner & C.M. Surko, PRL 55(1985) 496.
- 3) E. Moses & V. Steinberg, PR A34(1986) 693.
- 4) E. Moses, J. Fineberg & V. Steinberg, PR A35(1987) 2757.
- 5) R. Heinrichs, G. Ahlers & D. Cannell, PR A35(1987) 2761.
- 6) P. Kolodner, D. Bensimon & C.M. Surko, PRL 60(1988) 1723.
- 7) P. Kolodner, C.M. Surko & H. Williams, Physica D37(89) 319.
- 8) V. Steinberg, J. Fineberg, E. Moses & I. Rehberg, Physica D37(1989) 359.
- 9) T. Katoh & Y. Sawada, J. Phys. Soc. Jpn 58(1989) 3879.
- 10) J. Niemela, G. Ahlers & D. S. Cannell, PRL 64(90) 1365.
- 11) M.C. Cross, Phys. Lett. A24(1986) 21.

- 12) D. Bensimon, A. Pumir & B.T. Shraiman, J. de Phys. 50 (1989). 3089.
- 13) W. Barten, M. Lücke & M. Kamps, in "Nonlinear Evolution of Spatio-Temporal Structures in Dissipative Continuous Systems", (Plenum, 1990).
- 14) M.C. Cross, PRL 57 (86) 2935; PR A38 (88) 3593.
- 15) O. Thual & S. Fauve, J. de Phys. 49 (1988) 1829.

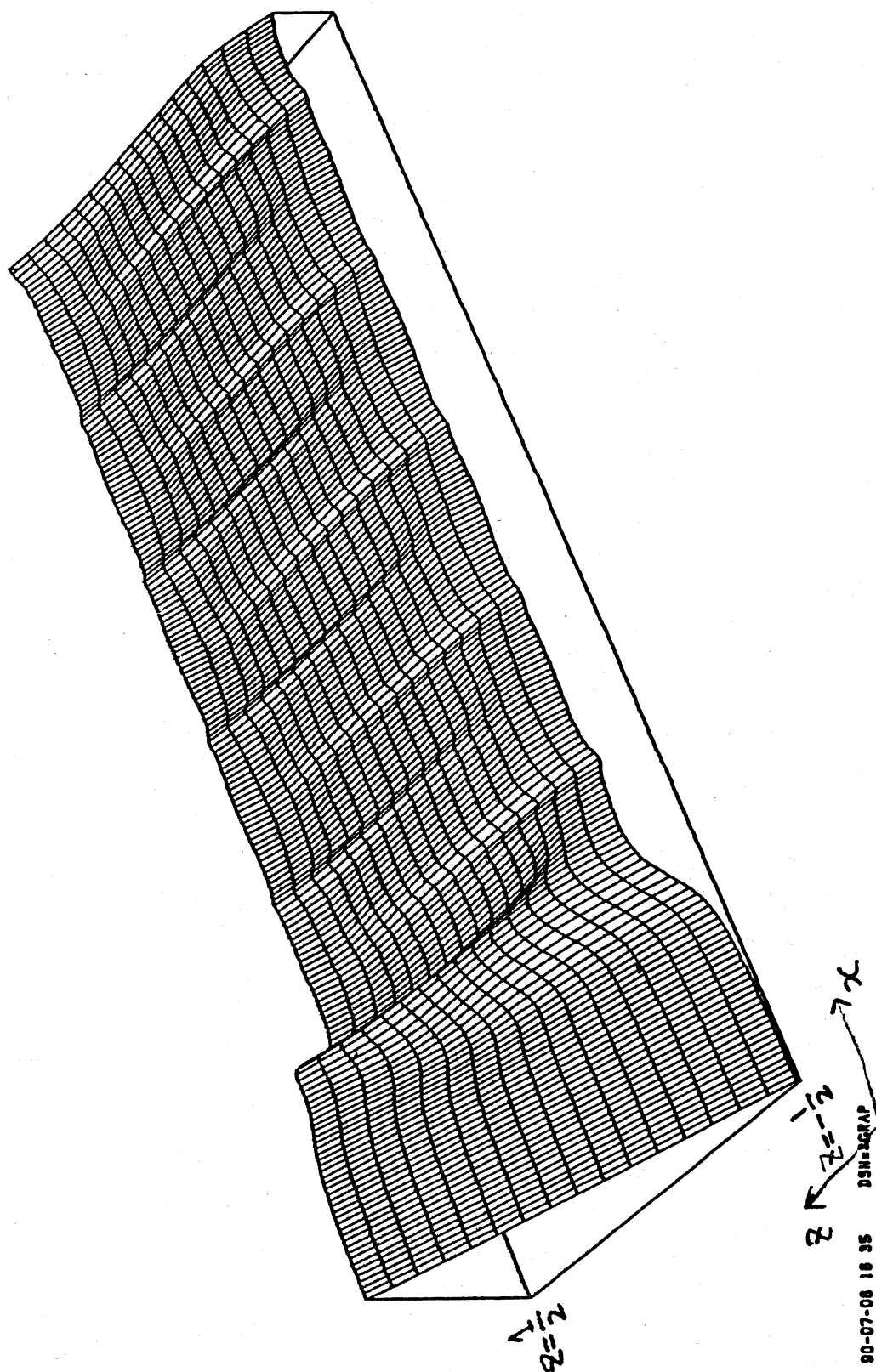


□ 1





3
14



4